ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 144 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-371-382

УДК 517.938

О рекуррентных движениях динамических систем в полуметрическом пространстве

Сергей Михайлович ДЗЮБА

ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»

170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

Аннотация. Настоящая работа посвящена изучению свойств рекуррентных движений динамической системы g^t, заданной в отделимом полуметрическом пространстве Γ.

На основании определений минимального множества и рекуррентного движения, введенных Дж. Биркгофом в начале прошлого века, получено новое достаточное условие рекуррентности движений системы g^t в Γ. Это условие устанавливает новое свойство движений, которое жестко связывает произвольные и рекуррентные движения. На основании данного свойства показано, что если в пространстве Γ положительная (отрицательная) полутраектория некоторого движения относительно секвенциально компактна, то ω-предельное (α-предельное) множеством этого движения является секвенциально компактным минимальным множеством.

В качестве одного из приложений полученных результатов изучено поведение движений динамической системы g^t, заданной на топологическом многообразии V. Это изучение позволило существенно упростить классическое представление о взаимоотношении движений на V, фактически изложенное Дж. Биркгофом в 1922 г. и с тех пор не менявшееся.

Ключевые слова: динамические системы, полуметрическое пространство, рекуррентные движения, топологическое многообразие, взаимоотношение движений

Для цитирования: *Дзюба С.М.* О рекуррентных движениях динамических систем в полуметрическом пространстве // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 144. С. 371–382. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-371-382

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-371-382

On recurrent motions of dynamical systems in a semi-metric space

Sergei M. DZYUBA
Tver State Technical University
22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Abstract. The present paper is devoted to studying the properties of recurrent motions of a dynamical system g^t defined in a Hausdorff semi-metric space Γ.

Based on the definitions of a minimal set and recurrent motion introduced by G. Birkhoff at the beginning of the last century, a new sufficient condition for the recurrence of motions of the system g^t in Γ is obtained. This condition establishes a new property of motions, which rigidly connects arbitrary and recurrent motions. Based on this property, it is shown that if in the space Γ positively (negatively) semi-trajectory of some motion is relatively sequentially compact, then the ω-limit (α-limit) set of this motion is a sequentially compact minimal set.

As one of the applications of the results obtained, the behavior of motions of the dynamical system g^t given on a topological manifold V is studied. This study made it possible to significantly simplify the classical concept of interrelation of motions on V which was actually stated by G. Birkhoff in 1922 and has not changed since then.

Keywords: dynamical systems, semi-metric space, recurrent motions, topological manifold, interrelation of motions

Mathematics Subject Classification: 37B20.

For citation: Dzyuba S.M. On recurrent motions of dynamical systems in a semi-metric space. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 371–382. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-371-382
(In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть Σ — метрическое пространство с метрикой d и $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — действительная ось. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R} \times \Sigma \to \Sigma$ и положим

$$f(t, p) = g^t p.$$

При этом будем считать, что:

(a) отображение f непрерывно по совокупности переменных t, p на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$;

(b) для всех $p \in \Sigma$

$$g^0 p = p;$$

(c) для всех $t, \tau \in \mathbb{R}$

$$g^{t+\tau} = g^t g^\tau.$$

Тогда будем говорить, что группа преобразований g^t — *динамическая система*, а для любого $p \in \Sigma$ функция $t \to f(t, p)$ — *движение* (см. [1, с. 347]).

Конечной целью общей теории динамических систем является «качественное определение всех возможных типов движений и взаимоотношений между этими движениями» (см. [2, с. 194]).

Важнейшим движением является рекуррентное, так как в полном пространстве Σ замыкание траектории рекуррентного движения представляет собой компактное минимальное множество (см. [1, с. 404]), а каждое движение $f(t, p)$, расположенное в компактном минимальном множестве M, рекуррентно (см. [1, с. 402]); кроме того, любое компактное инвариантное множество M_1 содержит компактное минимальное множество M (см. [1, с. 401]).

Еще до недавнего времени считалось, что в связном пространстве Σ существуют компактные инвариантные множества

$$M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_k \supset \ldots,$$

каждое из которых не является объединением компактных минимальных множеств (см. [1, гл. V]). Однако в работе [3] было доказано, что если $M_1 \neq \Sigma$, то в связном компактном пространстве Σ

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_k = \ldots = \varnothing.$$

Это позволило в работах [4, 5] установить полное взаимоотношение движений в Σ и на топологическом компактном многообразии. Здесь необходимо отметить, что в [1, с. 365, с. 375] приведены два типовых примера построения множеств типа M_k на торе и на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$. К сожалению, данные примеры оказались некорректными, что было показано в работе [6].

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие результатов работ [3–5], заключающееся в изучении свойств рекуррентных движений динамических систем в полуметрическом пространстве.

1. Основные свойства динамических систем

Пусть Γ — топологическое пространство и пусть на Γ задана полная однопараметрическая группа преобразований g^t, которая по определению представляет собой динамическую систему, поскольку g^t удовлетворяет аксиомам (a)–(c) (см., например, [7, с. 150, 152]).

Как обычно, множество $A \subset \Gamma$ будем называть *инвариантным*, если для всех $t \in \mathbb{R}$
$$g^t A = A$$
(см. [1, с. 349]).

Для системы g^t в пространстве Γ мы можем принять основные определения общей теории динамических систем, изначально введенные Дж. Биркгофом на замкнутом дифференцируемом многообразии (см. [2, гл. VII]). Именно:

(d) если $p \in \Gamma$, то ω*-предельным* множеством $\Omega(p)$ движения $f(t,p)$ называется множество
$$\Omega(p) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} f(s,p)};$$

(e) если $p \in \Gamma$, то α*-предельным* множеством $\mathrm{A}(p)$ движения $f(t,p)$ называется множество
$$\mathrm{A}(p) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\bigcup_{s \leq t} f(s,p)};$$

(f) множество $M \subset \Gamma$ называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего тремя указанными выше свойствами;

(g) любое движение $f(t,p)$, расположенное в компактном минимальном множестве M, называется *рекуррентным*.

В дальнейшем при исследовании рекуррентных движений системы g^t мы будем считать Γ полуметрическим пространством с отделимой структурой. Здесь необходимо отметить, что введение отделимой структуры в Γ является естественным, поскольку определение Биркгофа (f) фактически ее требует.

Напомним, что топологическое пространство Γ называется *полуметрическим*, если в нем определено направленное семейство полуметрик $(d_i)_{i \in I}$, где множество индексов I может иметь произвольную мощность (см., например, [8, с. 456]).

Напомним также, что функция $d_\gamma \colon \Gamma \times \Gamma \to [0, +\infty)$ называется *полуметрикой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(A) для всех $(p,q) \in \Gamma \times \Gamma$
$$d_\gamma(p,q) = d_\gamma(q,p);$$

(B) для всех $p \in \Gamma$
$$d_\gamma(p,p) = 0,$$
а случай
$$d_\gamma(p,q) = 0$$
не исключается при $q \neq p$;

(C) для всех $p \in \Gamma$, $q \in \Gamma$ и $r \in \Gamma$ выполнено неравенство треугольника
$$d_\gamma(p,q) \leq d_\gamma(p,r) + d_\gamma(r,q).$$

И, наконец, напомним, что семейство полуметрик $(d_i)_{i \in I}$ называется *направленным*, если для любой конечной части $J \subset I$ найдется такое $k \in I$, что $d_k \geq d_j$ для всех $j \in J$. Если же для каждой пары $p \neq q$ найдется такая полуметрика d_γ, что
$$d_\gamma(p,q) > 0,$$
то будем говорить, что пространство Γ снабжено *отделимой структурой* (см. [8, с. 456]).

З а м е ч а н и е 1.1. Простейшим примером полуметризуемого пространства с отделимой структурой может служить хаусдорфово компактное пространство Γ (см. [8, с. 458]). В таком пространстве полуметрики мы можем определить так, как это будет сделано ниже в п. 4. на топологическом многообразии.

Определение Биркгофа (g) не содержит никакой конструктивной информации о структуре рекуррентного движения. Поэтому, возвращаясь к изучению рекуррентных движений, заметим, что в пространстве Γ справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть траектория*

$$K(p) = \{f(t,p)\colon\ t \in \mathbb{R}\}$$

движения $f(t,p)$ системы g^t относительно компактна. Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $t \in \mathbb{R}$

$$d_i(f(t,p), f(t+N_\varepsilon, p)) < \varepsilon, \quad i \in I. \tag{1.1}$$

Тогда $f(t,p)$ — рекуррентное движение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, заметим, что силу неравенства (1.1) найдется такая последовательность натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} d_i(f(t,p), f(t+N_k,p)) = 0, \quad i \in I. \tag{1.2}$$

Для всех $N = 0,1,\ldots$ обозначим через P_N — множество функций

$$t \to f(t+N+m,p), \quad m = 0,1,\ldots,$$

определенных на отрезке $[0,1]$, а через $\bar{P}_N$ — замыкание множества P_N. Далее, заметим, что в силу относительной компактности траектории $K(p)$ все множества P_N равностепенно непрерывны на $[0,1]$, т. е. что для каждого $\eta > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $m = 0,1,\ldots$ равномерно относительно N

$$d_i(f(t_1+N+m,p)), f(t_2+N+m,p)) < \eta, \quad i \in I,$$

всякий раз, когда $|t_1 - t_2| < \delta$ (см. [5]). Значит, согласно третьей теореме Асколи, все множества $\bar{P}_N$ компактны в топологии равномерной сходимости (см. [8, с. 489]).

Очевидно, что по определению

$$P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_N \supset \ldots.$$

Кроме того, в силу равенства (1.2) каждое множество $\bar{P}_N$ инвариантно. Следовательно,

$$\bar{P}_0 = \bar{P}_1 = \ldots = \bar{P}_N = \ldots. \tag{1.3}$$

Заметим теперь, что согласно равенству (1.2)

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} d_i(f(t,p), f(t-N_k,p)) = 0, \quad i \in I.$$

Для всех $N = 0, 1, \ldots$ обозначим через P'_N — множество функций

$$t \to f(t - N - m, p), \quad m = 0, 1, \ldots,$$

определенных на отрезке $[0,1]$. Пусть $\bar{P}'_N$ — замыкание множества P'_N. Тогда, действуя как и выше, несложно показать, что все множества $\bar{P}'_N$ компактны в топологии равномерной сходимости, инвариантны и удовлетворяют условию

$$\bar{P}'_0 = \bar{P}'_1 = \ldots = \bar{P}'_N = \ldots = \bar{P}_0. \tag{1.4}$$

В силу компактности и инвариантности множеств $\bar{P}_N$ и $\bar{P}'_N$, отделимости пространства Γ и равенств (1.3) и (1.4) несложно заметить, что $\bar{K}(p)$ — компактное минимальное множество. Поэтому согласно определению (g) Биркгофа $f(t,p)$ — рекуррентное движение. □

З а м е ч а н и е 1.2. Вообще говоря, при одном естественном дополнительном предположении условие (1.1) выполняется с необходимостью (см. следствие 2.1).

2. Произвольные и рекуррентные движения

Основное значение теоремы 1.1 состоит в том, что из нее вытекает новое свойство произвольных и рекуррентных движений системы g^t. Это свойство устанавливает следующая

Теорема 2.1. *Пусть положительная полутраектория*

$$K^+(p) = \{f(t,p) \colon \ t \geq 0\}$$

движения $f(t,p)$ относительно секвенциально компактна. Тогда из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что существует рекуррентное движение $f(t,q)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) *для всех $t \geq 0$*

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t + N_{k_l}, p), f(t,q)) = 0, \quad i \in I; \tag{2.1}$$

(ii) *равномерно на всей оси $\mathbb{R}$*

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t + N_{k_{l+1}} - N_{k_l}, q), f(t,q)) = 0, \quad i \in I. \tag{2.2}$$

Аналогичным образом, если отрицательная полутраектория

$$K^-(p) = \{f(t,p) \colon \ t \leq 0\}$$

движения $f(t,p)$ относительно секвенциально компактна, то из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что существует рекуррентное движение $f(t,r)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(iii) *для всех $t \leq 0$*

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t - N_{k_l}, p), f(t,r)) = 0, \quad i \in I; \tag{2.3}$$

(iv) *равномерно на всей оси $\mathbb{R}$*

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t - N_{k_{l+1}} + N_{k_l}, r), f(t,r)) = 0, \quad i \in I. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что для доказательства теоремы 2.1 достаточно установить существование рекуррентного движения $f(t,q)$, удовлетворяющего условиям (i) и (ii). Проделаем это.

Для всех $N=1,2,\ldots$ положим

$$p_N = f(N,p). \tag{2.5}$$

Тогда, как несложно заметить,

$$p_{N+m} = f(m,p_N), \quad N=1,2,\ldots, \quad m=0,1,\ldots. \tag{2.6}$$

Пусть $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ — произвольная последовательность натуральных чисел. В соответствие с $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ из $(p_N)_{N\in\mathbb{N}}$ выберем последовательность $(p_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$. В силу относительной секвенциальной компактности полутраектории $K^+(p)$ из $(p_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ можно такую ее подпоследовательность $(p_{N_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$, что для некоторой точки $q\in\bar K^+(p)$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(p_{N_{k_l}},q)=0, \quad i\in I,$$

где $\bar K^+(p)$ — замыкание множества $K^+(p)$.

Так как по условию множество $\bar K^+(p)$ секвенциально компактно, то, действуя стандартным образом, несложно показать, что ω-предельное множество $\Omega(p)\subset\bar K^+(p)$ движения $f(t,p)$ непусто, секвенциально компактно и инвариантно (см. [1, гл. V]). Отсюда, в частности, следует, что движение $f(t,q)$ расположено в $\Omega(p)$.

Поскольку отображение $(t,x)\to g^t x$ непрерывно и множество $\bar K^+(p)$ компактно, то множество P функций

$$t\to f(t,p_N), \quad N=1,2,\ldots,$$

определенных при $t\ge 0$, равностепенно непрерывно на произвольном отрезке $[0,T]$ (см. [5]). Значит, равномерно на каждом отрезке $[0,T]$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t,p_{N_{k_l}}),f(t,q))=0, \quad i\in I. \tag{2.7}$$

Аналогичным образом, множество Q функций

$$t\to f(t\pm m,q), \quad m=0,1,\ldots,$$

определенных на отрезке $[0,1]$, равностепенно непрерывно на $[0,1]$. Следовательно, его замыкание $\bar Q$ компактно в топологии равномерной сходимости.

Для всех $l=1,2,\ldots$ обозначим через $P_{N_{k_l}}$ — множество функций

$$t\to f(t+m,p_{N_{k_l}}), \quad m=0,1,\ldots,$$

определенных на отрезке $[0,1]$, а через $Q_0\subset Q$ — множество функций

$$t\to f(t+m,q), \quad m=0,1,\ldots,$$

также определенных на $[0,1]$. Тогда в силу равенств (2.5) и (2.7)

$$\bar Q_0\subset\bigcap_{l\ge1}\bar P_{N_{k_l}}, \tag{2.8}$$

где $\bar{P}_{N_{k_l}}$ и $\bar{Q}_0$ — замыкания множеств $P_{N_{k_l}}$ и Q_0 соответственно.

Пусть

$$\Delta_{N_{k_l}} = N_{k_{l+1}} - N_{k_l}, \quad l = 1, 2, \ldots .$$

Принимая во внимание равенство (2.6), заметим, что

$$p_{N_{k_{l+1}}} = f(\Delta_{N_{k_l}}, p_{N_{k_l}}).$$

Следовательно, согласно равенству (2.7)

$$\lim_{l \to +\infty} d_i(f(\Delta_{N_{k_l}}, p_{N_{k_l}}), q) = 0, \quad i \in I. \tag{2.9}$$

Более того, так как множество $\Omega(p)$ секвенциально компактно, то без какой-либо потери общности можем считать, что найдется такая точка $q^* \in \Sigma$, что существует предел

$$\lim_{l \to +\infty} d_i(f(\Delta_{N_{k_l}}, q), q^*) = 0, \quad i \in I. \tag{2.10}$$

Заметим теперь, что в пространстве Γ введена отделимая полуметрическая структура. Поэтому, если $q \neq q^*$, то существует такая полуметрика d_γ, что

$$d_\gamma(q, q^*) > 0.$$

Тогда в силу равенств (2.9) и (2.10) найдется такое положительное число $\varepsilon > 0$, что при всех $l = 1, 2, \ldots$

$$d_\gamma(f(\Delta_{N_{k_l}}, p_{N_{k_l}}), f(\Delta_{N_{k_l}}, q)) \geq \varepsilon. \tag{2.11}$$

В этом случае движение $f(t, q)$ не является периодическим движением с натуральным периодом. Значит,

$$\sup_{l \geq 1} \Delta_{N_{k_l}} = +\infty \tag{2.12}$$

и

$$\sup_{l \geq 1} (\Delta_{N_{k_{l+1}}} - \Delta_{N_{k_l}}) = +\infty. \tag{2.13}$$

Для простоты обозначений положим

$$t_{k_l} = \Delta_{N_{k_l}} + 1, \quad l = 1, 2, \ldots .$$

Тогда согласно неравенству (2.11) для всех $l = 1, 2, \ldots$

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k_l}} d_\gamma(f(t, p_{N_{k_l}}), f(t, q)) \geq \varepsilon.$$

Поэтому в силу равенства (2.7) без какой-либо потери общности можем считать, что существует такая последовательность положительных чисел $(\varepsilon_l)_{l \in \mathbb{N}} \downarrow 0$, что

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k_l}} d_\gamma(f(t, p_{N_{k_l}}), f(t, q)) \geq \varepsilon \tag{2.14}$$

и

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k_l}} d_\gamma(f(t, p_{N_{k_{l+1}}}), f(t, q)) < \varepsilon_l. \tag{2.15}$$

Согласно (2.12) объединение

$$\bigcup_{l\geq 1}[0, t_{k_l}]$$

расширяющихся отрезков

$$[0, t_{k_1}] \subset [0, t_{k_2}] \subset \ldots \subset [0, t_{k_l}] \subset \ldots$$

исчерпывает всю полуось $[0, +\infty)$, а на каждом отрезке $[0, t_{k_l}]$ выполнены неравенства (2.14) и (2.15). Последнее, однако, в силу равенства (2.13) и включения (2.8) невозможно.

Полученное противоречие означает, что вне зависимости от периодичности движения $f(t, q)$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(\Delta_{N_{k_l}}, q), q) = 0, \quad i \in I.$$

Следовательно, равномерно на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t + \Delta_{N_{k_l}}, q), f(t, q)) = 0, \quad i \in I. \tag{2.16}$$

Более того, поскольку множество $\bar{Q}$ компактно, то в силу равенства (2.16)

$$\bar{Q} = \bigcap_{l\geq 1} g^{\Delta_{N_{k_l}}} \bar{Q} \tag{2.17}$$

(см. доказательство теоремы 1.1).

Предположим, что сходимость в (2.16) не равномерна на всей оси $\mathbb{R}$. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и $j \in I$, что для всех $l = 1, 2, \ldots$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} d_j(f(t + \Delta_{N_{k_l}}, q), f(t, q)) \geq \varepsilon.$$

Поэтому найдутся такие последовательности $(\varepsilon_l)_{l\in\mathbb{N}} \uparrow \varepsilon$ положительных и $(m_l)_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ натуральных чисел, что

$$\delta_l = \max_{-m_l\leq t\leq m_l} d_j(f(t + \Delta_{N_{k_l}}, q), f(t, q)) \geq \varepsilon_l.$$

Следовательно,

$$\lim_{l\to+\infty} \sup \delta_l \geq \varepsilon.$$

Последнее, однако, противоречит равенству (2.17). Значит, сходимость в равенстве (2.16) равномерна на всей оси $\mathbb{R}$.

Таким образом, в силу теоремы 1.1 и равномерной сходимости в (2.16) на всей оси $\mathbb{R}$ видим, что $f(t, q)$ — рекуррентное движение. □

Следствие 2.1. *Если траектория $K(p)$ движения $f(t, p)$ относительно секвенциально компактна, то условие рекуррентности (1.1) выполняется с необходимостью.*

З а м е ч а н и е 2.1. По построению несложно заметить, что множество $\bar{Q}_0$ представляет собой компактное в топологии равномерной сходимости минимальное множество M.

3. Основное свойство предельных множеств

Из теоремы 2.1 вытекает новое свойство предельных множеств системы g^t, которое можно считать основным. Это свойство устанавливает следующая

Теорема 3.1. *Если положительная полутраектория $K^+(p)$ движения $f(t,p)$ относительно секвенциально компактна, то ω-предельное множество $\Omega(p)$ данного движения — секвенциально компактное минимальное множество. Если же отрицательная полутраектория $K^-(p)$ движения $f(t,p)$ относительно секвенциально компактна, то α-предельное множество $\mathrm{A}(p)$ данного движения — секвенциально компактное минимальное множество.*

Доказательство. Для всех $N = 1, 2, \ldots$ обозначим через P_N — множество функций

$$t \to f(t + N + m, p), \quad m = 0, 1, \ldots,$$

определенных на отрезке $[0,1]$. Пусть $\bar{P}_N$ — замыкание множества P_N. При этом положим

$$M = \bigcap_{N \geq 1} \bar{P}_N. \tag{3.1}$$

Очевидно, что

$$\bar{P}_1 \supset \bar{P}_2 \supset \ldots \supset \bar{P}_N \supset \ldots .$$

Поэтому для каждой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$

$$M = \bigcap_{k \geq 1} \bar{P}_{N_k}. \tag{3.2}$$

Поскольку полутраектория $K^+(p)$ относительно секвенциально компактна, то любое множество P_N равностепенно непрерывно, т. е. множество M непусто, компактно в топологии равномерной сходимости и инвариантно (см. [5]). Более того, в силу включения (2.8) и равенств (3.1), (3.2) несложно заметить, что M — компактное в топологии равномерной сходимости минимальное множество (см. замечание 2.1). Отсюда следует, что $\Omega(p)$ — секвенциально компактное минимальное множество.

Заметим теперь, что доказательство второй части теоремы 3.1 фактически ничем не отличается от приведенного выше. □

4. Динамические системы на многообразиях

Пусть V — топологическое многообразие размерности n и пусть на V задана полная однопараметрическая группа преобразований g^t, т. е. g^t представляет собой динамическую систему, для которой установлены все базовые понятия общей теории динамических систем, приведенные ранее в п. 1.

Зафиксируем произвольный атлас $(\Phi_s, \varphi_s)_{s\in S}$ многообразия V, где Φ_s — некоторая открытая часть пространства $\mathbb{R}^n$ и φ_s — гомеоморфизм Φ_s на $V_s \subset V$. Для всех $s \in S$ любое компактное множество $E \subset \Phi_s$ имеет компактный образ $\varphi_s(E)$ в V. Значит, многообразие V полуметризуемо как топологическое локально компактное пространство (см. [8, с. 458]). Полуметрики на V мы определим следующим образом.

Зафиксируем некоторое непустое открытое множество $V_0 \subset V$ и зададим непрерывное отображение $\gamma\colon V \to [0,+\infty)$, такое, что $\gamma(p) > 0$, если $p \in V_0$, и $\gamma(p) = 0$ в противном случае. Тогда, очевидно, равенство

$$d_\gamma(p,q) = |\gamma(p) - \gamma(q)|$$

дает полуметрику d_γ на V (см. [8, с. 457]).

Изменяя функцию γ, мы можем получать различные полуметрики d_γ. Значит, всегда можно построить семейство полуметрик $(d_i)_{i\in I_0}$, которое будет направленным. При этом всегда можно добиться того, что для двух любых точек $p \neq q$ нашлась полуметрика d_γ, для которой $d_\gamma(p,q) > 0$. Проделав эту процедуру на всех непустых открытых множествах $V_0 \subset V$, мы превратим V в полуметрическое пространство с отделимой структурой, где топология вводится семейством полуметрик $(d_i)_{i\in I}$.

Поскольку каждое бесконечное компактное множество $E_0 \subset \Phi_s$ секвенциально компактно, его образ $\varphi_s(E_0)$ также секвенциально компактен. Поэтому в силу результатов п.п. 1.–3. на многообразии V справедливы следующие теоремы.

Теорема 4.1. *Если траектория $K(p)$ движения $f(t,p)$ системы g^t относительно компактна, то необходимое и достаточное условие рекуррентности $f(t,p)$ состоит в том, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство* (1.1).

Теорема 4.2. *Если положительная полутраектория $K^+(p)$ движения $f(t,p)$ относительно компактна, то из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что существует рекуррентное движение $f(t,q)$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i$'$) *для всех $t \geq 0$ выполнено равенство* (2.1);

(ii$'$) *равномерно на всей оси $\mathbb{R}$ выполнено равенство* (2.2).

Если же отрицательная полутраектория $K^-(p)$ движения $f(t,p)$ относительно компактна, то из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что существует рекуррентное движение $f(t,r)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(iii$'$) *для всех $t \leq 0$ выполнено равенство* (2.3);

(iv$'$) *равномерно на всей оси $\mathbb{R}$ выполнено равенство* (2.4).

Теорема 4.3. *Если положительная полутраектория $K^+(p)$ движения $f(t,p)$ относительно компактна, то ω-предельное множество $\Omega(p)$ данного движения — компактное минимальное множество. Если же отрицательная полутраектория $K^-(p)$ движения $f(t,p)$ относительно компактна, то α-предельное множество $\mathrm{A}(p)$ данного движения — компактное минимальное множество.*

Остается добавить, что в силу теоремы 4.3 теорема 4.2 существенно упрощает классическое представление о взаимоотношении движений на V, фактически изложенное в [2, гл. VII] и с тех пор не менявшееся. Что же касается теоремы 4.1, то в дополнение к определению Биркгофа (g) она дает достаточно полное представление о структуре рекуррентного движения как функции времени.

References

[1] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].

[2] Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999. [G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Udm. University Publ., Izhevsk, 1999 (In Russian)].

[3] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 5–14. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, “About new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:13 (2021), 5–14 (In Russian)].

[4] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О взаимоотношении движений динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:138 (2022), 136–142. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, “On the interrelation of motions of dynamical systems”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:138 (2022), 136–142 (In Russian)].

[5] S. M. Dzyuba, “On the interrelation of motions of dynamical systems on compact manifolds”, *Lobachevskii J. Math.*, **44**:7 (2023), 2630–2637.

[6] A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, “The interrelation of motions of dynamical systems in a metric space”, *Lobachevskii J. Math.*, **43**:12 (2022), 3414–3419.

[7] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, УРСС, М., 2009. [L. S. Pontryagin, *Topological Groups*, URSS Publ., Moscow, 2009 (In Russian)].

[8] Л. Шварц, *Анализ.* Т. II, Мир, Moscow, 1972. [L. Schwartz, *Analisys.* V. II, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

Информация об авторе

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

Поступила в редакцию 22.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 31.10.2023 г.
Принята к публикации 23.11.2023 г.

Information about the author

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

Received 22.06.2023
Reviewed 31.10.2023
Accepted for press 23.11.2023